



زمان ۴۵min

درس آزمون ریاضی

دبیر آکادمی دکتر فدوی

مبحث مثلثات

منبع: قلمچی

ریاضی

گزینه ۱

۱

دوره تناوب $y = 3 \sin cx - 2$ برابر با $\frac{2\pi}{|c|}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2$$

ماکزیم و مینیم تابع $y = \pi \sin(-x) + c$ برابر با $\pi + c$ و $-\pi + c$ است، پس:

$$-\pi + c + \pi + c = 2c \Rightarrow |2c| = 2|c| = 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

گزینه ۴

۲

$$\sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \sin x = 1$$

معادله $\sin x = 0$ در بازه داده شده ۳ جواب $0, \pi, 2\pi$ دارد.

معادله $\sin x = 1$ در این بازه یک جواب $x = \frac{\pi}{2}$ دارد.

بنابراین معادله داده شده در بازه $[0, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

گزینه ۴

۳

باتوجه به نمودار تابع $\tan x$ ، باید $\tan a = 1$ و a در ربع اول باشد؛ بنابراین $a = \frac{\pi}{4}$ است و $\tan b = \sqrt{3}$ و b در $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ است، پس $b = \frac{4\pi}{3}$ ؛ بنابراین:

$$b - a = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

گزینه ۱

۴

$$AA' = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha \Rightarrow OB' = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

با استفاده از رابطه $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ داریم:

$$\sin x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos x = 1$$

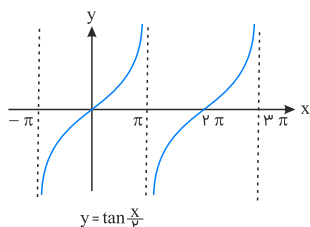
اما در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می‌آید.



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ است؛ بنابراین نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

$$\frac{\lambda \sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda \sin^2 x \cdot \cos^2 x}_{\lambda \times \frac{1}{4} \sin^2 2x} + 3 \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x = 0$$

$$\xrightarrow{\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x} 2 \cos^2 2x - 3 \cos^2 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 2 & \text{غ.ق.} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} & \text{ق.ق.} \end{cases} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{\pi + 2\pi + 4\pi + 5\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

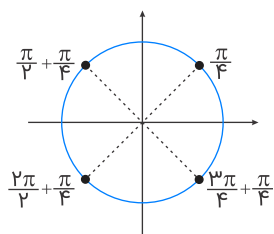
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

$$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{1 - \cos^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{1}{1 - \cos^2 x} = 2 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

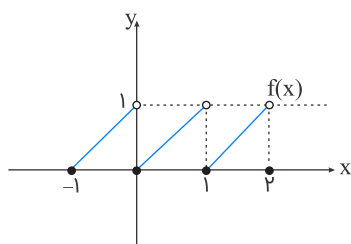
$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

انتهای کمان نظیر جوابهای معادله را در شکل زیر نشان داده‌ایم که می‌توان آن‌ها را با عبارت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ نمایش داد.

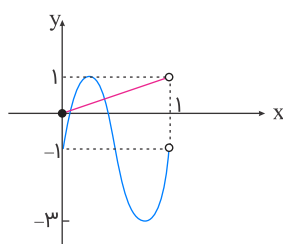


قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

نمودار تابع f به شکل زیر است و دوره تناوب آن برابر یک است.



دوره تناوب تابع g برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است، بنابراین نمودار توابع f و g در یک دوره تناوب به شکل زیر است و نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



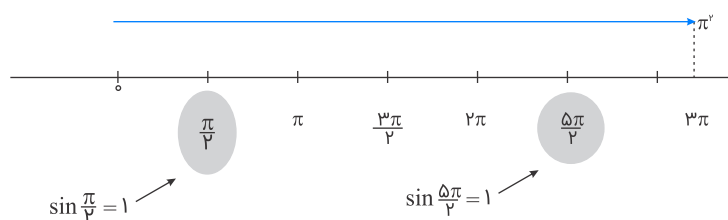
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - x) = \sin x$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{2}x &= \sin x \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x - \sin x = 0 \\ \Rightarrow \sin x (\sqrt{2} \cos x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sqrt{2} \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۷

می‌دانیم ما کزیم عبارت $y = \sin x^2$ وقتی است که $\sin x^2 = 1$ باشد. اگر $0 \leq x < \pi$ باشد، آنگاه $0 \leq x^2 < \pi^2$ خواهد بود. روی دایره مثلثاتی وقتی زاویه از صفر تا π^2 تغییر می‌کند، مقدار سینوس ۲ بار برابر ۱ می‌شود. به‌طور دقیق‌تر روی محور زیر مشاهده می‌کنید:



در نتیجه به ازای $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ عبارت $y = \sin x^2$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

$$\tan \sqrt{2}x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x(1 + \tan x)}{\cos x(1 - \tan x)} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{2}x &= k\pi + \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow \sqrt{2}x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\lambda} \\ \xrightarrow[k=0,1]{x \in [0, \pi]} x &= \frac{\pi}{\lambda}, x = \frac{5\pi}{\lambda} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{6\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

راه حل اول:

مقدار عبارت داده شده و هر ۴ گزینه را حساب می کنیم:

$$\sin ۱۵^\circ = \sin(۱۸^\circ - ۳^\circ) = \sin ۳^\circ = \frac{1}{۲}$$

$$A = ۱ - ۲\sin^2 ۱۵^\circ = ۱ - ۲\left(\frac{1}{۲}\right)^2 = \frac{1}{۲}$$

گزینه ۱:

$$-\sin \frac{۴\pi}{۳} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = \sin \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گزینه ۲:

$$\cos \frac{۲\pi}{۳} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos \frac{\pi}{۳} = -\frac{1}{۲}$$

گزینه ۳:

$$\cos ۳۰^\circ = \cos(۳۶^\circ - ۶^\circ) = \cos ۶^\circ = \frac{1}{۲}$$

گزینه ۴:

$$\frac{1}{۲} \tan ۳۱۵^\circ = \frac{1}{۲} \tan(۳۶^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{1}{۲}(-\tan ۴۵^\circ) = \frac{1}{۲} \times (-۱) = -\frac{1}{۲}$$

پس مقدار A فقط با گزینه ۳ برابر است.

راه حل دوم:

با استفاده از اتحاد $\cos ۲\theta = ۱ - ۲\sin^2 \theta$ و با جایگذاری $\theta = ۱۵^\circ$ داریم:

$$\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sin^2 ۱۵^\circ$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۶ ۱۳۹۸

$$A = \frac{1}{۲}(۱ - ۲\sin^2 x) \sin ۲x \xrightarrow{\times ۲} ۲A = (۱ - ۲\sin^2 x) \sin ۲x$$

$$\Rightarrow ۲A = \cos ۲x \sin ۲x \xrightarrow{\times ۲} ۴A = ۲ \sin ۲x \cos ۲x$$

$$\Rightarrow ۴A = \sin ۴x \Rightarrow A = \frac{1}{۴} \sin ۴x \xrightarrow{x=۱۱/۲۵^\circ} A = \frac{1}{۴} \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۸

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos\frac{3\pi}{14} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{14}\right) = -\cos\frac{11\pi}{14}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{14} \sin\frac{3\pi}{14} \sin\frac{5\pi}{14} = \cos\frac{3\pi}{14} \cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{11\pi}{14} \cos\frac{3\pi}{14} \cos\frac{\pi}{7}$$

با ضرب عبارت فوق در $\sin\frac{\pi}{7}$ و تقسیم آن بر $\sin\frac{\pi}{14}$ داریم:

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{14} \cos\frac{11\pi}{14} \cos\frac{3\pi}{14} \cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{-\frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{7} \cos\frac{3\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \sin\frac{3\pi}{7} \cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{-\frac{1}{2} \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۸

$$1 - \sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)$$

$$= \cos^2\theta \times \sin^2\theta = (\cos\theta \sin\theta)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$$

$$= \frac{1}{4} \times a^2 = \frac{a^2}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

$$\sin^{\nu} \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \Rightarrow \sin^{\nu} (ax + b\pi) = \frac{1 - \cos(2ax + 2b\pi)}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ax + 2b\pi)$$

بنابراین دوره تناوب تابع این سؤال برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$. از طرفی از نمودار مشخص است که $T = \pi$ است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حالت اول: $a = 1 \Rightarrow y = \sin^{\nu}(x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sin^{\nu}\left(b + \frac{1}{\lambda}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b + \frac{1}{\lambda}$ باید عددی صحیح باشد.

حالت دوم: $a = -1 \Rightarrow y = \sin^{\nu}(-x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sin^{\nu}\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b - \frac{1}{\lambda}$ باید عددی صحیح باشد.

حال اگر اعداد صحیح $+1$ و -1 را به ترتیب با جوابهای متناظر به دست آمده برای آنها جمع کنیم، عدد حاصل صحیح باقی خواهد ماند؛ بنابراین داریم:

$$a + b \pm \frac{1}{\lambda} = k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a + b = k \pm \frac{1}{\lambda} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

در بین گزینه‌ها، فقط $\frac{7}{\lambda}$ است که آن را به فرم بالا می‌توان نوشت.

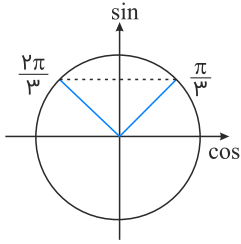
برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگتر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم:

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^2 \sin 2\alpha}{10} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=10} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

به ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{\pi}{3}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

با استفاده از روابط $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ داریم:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \tan x = 2$$

می‌دانیم که $1 + \cos 2x \geq 0$ است؛ بنابراین صورت کسر سؤال نیز باید مثبت باشد تا حاصل کسر عددی مثبت شود؛ یعنی $\sin 2x > 0$ ، حال داریم:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 2x &= 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \Rightarrow \sin 2x &= \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\sin 2x > 0} \sin 2x = 4/5 \end{aligned}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

باتوجه به شکل، دوره تناوب این تابع $T = 5$ است. می‌دانیم در توابع متناوب اگر از هر نقطه روی نمودار به اندازه دوره تناوب یا مضربی صحیح از آن جلو یا عقب برویم، مقدار تابع تغییر نمی‌کند. حال از آنجا که مقدار $f(128/1)$ خواسته شده، می‌توانیم بگوییم:

$$f(128/1) = f(128/1 - \bigcirc T) \xrightarrow{\bigcirc=25} f(128/1 - 125) = f(3/1)$$

○: مضرب صحیحی از دوره تناوب

پس کافی است مقدار $f(3/1)$ را بیابیم که برای این منظور باید معادله خط مشخص شده در شکل در بازه $[3, 4]$ را بنویسیم:

معادله خط گذرنده از دو نقطه $(4, 0)$ ، $(3, -2)$:

$$y - 0 = \frac{0 - (-2)}{4 - (3)}(x - 4) \Rightarrow y = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 8$$

$$f(x) = 2x - 8 \Rightarrow f(3/1) = 2(3/1) - 8 = -1/1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

$$y_{\min} = -|a| + 2 = 0 \Rightarrow |a| = 2$$

باتوجه به نمودار، $\frac{5}{3}$ دوره تناوب این تابع برابر با $\frac{10}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$ است؛ در نتیجه داریم:

$$\frac{5}{2}T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$$

ازطرفی دوره تناوب این تابع برابر است با:

$$\frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |ab| = |a||b| = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + \sin(1 + bx)\pi \Rightarrow f(x) = a + \sin(\pi + b\pi x) = a - \sin b\pi x$$

باتوجه به نمودار $f(0) = -1$ در نتیجه:

$$f(0) = a \Rightarrow -1 = a$$

همچنین دوره تناوب تابع برابر ۴ است، در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون بلافاصله بعد از $x = 0$ نمودار تابع نزولی است، پس باید ضریب نهایی سینوس منفی باشد:

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} : f(x) = -1 - \sin \frac{1}{2}\pi x & \text{ق.ق} \\ b = -\frac{1}{2} : f(x) = -1 - \sin \frac{-1}{2}\pi x = -1 + \sin \frac{\pi x}{2} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{-1}{2}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۷

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \xrightarrow{\times 2} \sin 2x - 1 + \cos 2x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow 1 + \sin 4x &= \frac{3}{2} - \sqrt{2} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

طول نقاط تلاقی $y = ۱$ و $y = ۲ \sin \left(۲x - \frac{\pi}{۶} \right)$ ، جواب‌های معادله $۲ \sin \left(۲x - \frac{\pi}{۶} \right) = ۱$ هستند، پس:

$$\sin \left(۲x - \frac{\pi}{۶} \right) = \frac{۱}{۲} = \sin \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب‌های مثبت عبارت‌اند از:

$$x = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۱۳\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۲}, \dots$$

ششمین جواب مثبت و طول نقطه A برابر با $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

$$T = \frac{۳\pi}{۴} - \left(-\frac{\pi}{۴} \right) = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} b = ۲ & \text{باید } b > ۰ \text{ باشد} \\ b = -۲ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$-۱ \leq \sin ۲x \leq ۱ \Rightarrow -۲ \leq ۲ \sin ۲x \leq ۲ \xrightarrow{+a} a - ۲ \leq a + ۲ \sin ۲x \leq ۲ + a$$

$$y_{\max} = ۲ + a = ۵ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow a \times b = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

باتوجه به نمودار:

$$f(\phi) = a \sin(\phi + \frac{\pi}{6}) + c = \frac{a}{2} + c = \frac{9}{4} \quad (1)$$

همچنین بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{5}{2}$ است.

$$\Rightarrow a + c = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a - \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, c = 2$$

اختلاف طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی در چنین توابعی نصف دورهٔ تناوب است.

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{T = \frac{2\pi}{|b|}} |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

باتوجه به شکل نمودار، باید $ab > 0$ باشد. حال چون در معادلهٔ (۲) مقدار مثبت a را پذیرفته‌ایم، در اینجا نیز $b = 3$ را باید بپذیریم.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 2$$

$$\Rightarrow f(\pi) = -\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{6}) + 2 = \frac{7}{4}$$

تذکر: اگر مقادیر منفی را برای a و b در نظر بگیریم، داریم:

$$a = -\frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \sin(-3x + \frac{\pi}{6}) + \frac{7}{3} \Rightarrow f(\pi) = \frac{29}{12}$$

که در این صورت نمودار این تابع با نمودار رسم‌شده در صورت سؤال متفاوت خواهد بود.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۸

می‌دانیم $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ بنابراین:

$$\begin{aligned} A &= [\tan \frac{\pi}{5}] + [\tan \frac{2\pi}{5}] + [\tan(\pi - \frac{2\pi}{5})] + [\tan(\pi - \frac{\pi}{5})] \\ \Rightarrow A &= [\tan \frac{\pi}{5}] + [\tan \frac{2\pi}{5}] + [-\tan \frac{2\pi}{5}] + [-\tan \frac{\pi}{5}] \\ \Rightarrow A &= ([\tan \frac{\pi}{5}] + [-\tan(\frac{\pi}{5})]) + ([\tan \frac{2\pi}{5}] + [-\tan \frac{2\pi}{5}]) \end{aligned}$$

می‌دانیم $\tan \frac{\pi}{5}, \tan \frac{2\pi}{5} \notin \mathbb{Z}$ از طرفی اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آنگاه $-x \neq 1$ ، بنابراین:

$$A = (-1) + (-1) = -2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۷

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{3\cos(\pi + x) - \sin(3\pi - x)} = \frac{-3}{5}$$

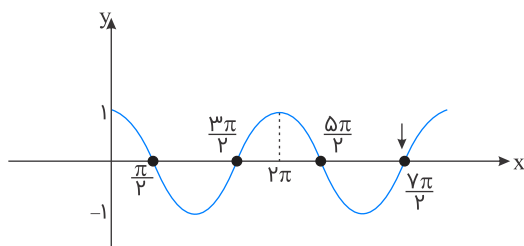
$$\Rightarrow \frac{-\cos x + 2\sin x}{-3\cos x - \sin x} = \frac{-3}{5} \Rightarrow -5\cos x + 10\sin x = 9\cos x + 3\sin x$$

$$\Rightarrow \sin x = 2\cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\cot x = -\frac{1}{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

به نمودار تابع $y = \cos x$ توجه کنید. برای آنکه نمودار محور x ها را در ۴ نقطه به ازای $x \geq 0$ قطع کند، کمترین مقدار a باید برابر با $\frac{3\pi}{4}$ باشد.



قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸